

# Þróunarverkefni um skapandi námsmat í stærðfræði með notkun upplýsingatækni Lokaskýrsla til Sprotasjóðs



Menntaskólinn í Kópavogi

Verkefnastjórar:

Guðrún Angnatýsdóttir

Vilhjálmur Þór Sigurjónsson

Ráðgjafi:

Freyja Hreinsdóttir

No. 72.2013-2014.

## Efnisyfirlit

Inngangur .....	3
Markmið verkefnis samkvæmt umsókn .....	4
Leiðir sem valdar voru til að ná markmiði .....	4
Frávik miðað við áætlun verkefnisins .....	6
Helstu hindrarnir sem komu upp við vinnu verkefnisins .....	7
Helsti ávinningur af vinnu við verkefnið, jákvæð atriði sem fylgdu í kjölfar eða samhliða verkefnisvinnu .....	8
Mat á verkefninu samkvæmt umsókn .....	9
Niðurstöður verkefnisins .....	9
Áætlun um kynningu á afrakstri verkefnisins og helstu niðurstöðum	10
Heimildir .....	11
Fylgiskja 1 - Kennsluleiðbeiningar með kveikju .....	12
Fylgiskjal 2 – Rannsóknarverkefni í GeoGebru.....	16
Fylgiskjal 3 – Rafræn æfing .....	19
Fylgiskja 4 – Námsmatsverkefni .....	20
Jafna línu - Hugarkort / Veggspjald .....	21
Fylgiskjal 5 – Sjálfsmat .....	24

## Inngangur

Í þessu þróunarverkefni er gerð tilraun til að byggja upp heildstætt kennsluferli við kennslu efnisþátta í stærðfræði. Í því felst að viðfangsefninu fylgja skýr þekkingar-, leikni- og hæfniviðmið. Kennari hefur kennslu viðfangsefnis með kveikju sem tengir nýja þekkingu þeirri sem fyrir er. Þegar fjallað er um viðfangsefnið er mikilvægt að kennari meti bæði stöðu nemenda og framfarir. Megináhersla er lögð á að nemendur dýpki skilning sinn með því að byggja upp þekkingu og leikni sem þeir nota til að draga ályktanir og skýra lausnir sínar. Ef það tekst er hægt að meta hæfni nemenda. Við stærðfræðikennarar í Menntaskólanum í Kópavogi (MK) lítum svo á að tilgangur námsmats sé að leiðbeina nemendum. Lögð er áhersla á að endurgjöf sé virkur þáttur í námsferlinu. Lagt er mat á afmarkaða efnisþætti fljótlega eftir að þeir hafa verið unnir. Niðurstaðan er forsenda fyrir áframhaldandi vinnu og leiðir nemendur áfram svo þeir geti bætt frammistöðu sína. Sjálfsmat og jafningjamat eru mikilvægir þættir í leiðsagnarmati.

Í aðalnámskrá framhaldsskóla frá 2011 er fjallað um lærdómsviðmið (learning outcome), þar sem sett er fram viðmið um þekkingu, leikni og hæfni sem nemandinn á að búa yfir eftir að hann hefur lokið ákveðinni námseiningu (Aðalnámskrá framhaldsskóla, 2011). Áherslubreyting frá fyrri námsskrá felst í því að viðmiðin eru nemendamiðuð, þ.e. lögð er áhersla á hvað nemandinn á að tileinka sér. Þetta er ný sýn á hæfni, þar sem sjónum er beint að því hvað hægt er að gera með þekkingu og leikni sem nemandi hefur tileinkað sér, en ekki bara að hann afli sér þekkingar og leikni. Slík sýn hefur áhrif á hvernig litið er á nám sem þarf að vera nemendamiðuð og áfangar eiga að skilgreina þann tíma sem nemandi þarf að tileinka sér ákveðna hæfni. Þannig færast ábyrgð á nemendur og meiri áhersla er lögð á leiðsögn kennara. Þegar meta á hæfni verður að taka tillit til þess hve víðtækt og fjölbreytt matið þarf að vera. Forsenda matsins eru viðmið sem sett eru fram á skipulegan hátt og öllum hlutaðeigandi ljós. Námsmat er ferli sem hefst með því að sett eru fram stefnumið og námsmarkmið og því lýkur með matsniðurstöðu. Námsmat er eðlilegur hluti af námi og kennslu og það þarf að meta reglulega til að skipuleggja betur framhaldið. Mikilvægt er að nota fjölbreyttar matsaðferðir sem jafnframt eiga að hæfa markmiðum náms og kennslu. Ekki má eingöngu meta þekkingu heldur einnig framfarir og hæfni nemendans til að tileinka sér þá þekkingu og leikni sem hann hefur áunnið sér í náminu. Þannig hefur námsmat bein áhrif á kennsluna. Þátttaka nemanda í mati á eigin frammistöðu eða framförum er grundvallaratriði við mat sem leiðir til frekara náms og framfara.

Með því að auka hæfni nemenda geta þeir yfirfært þekkingu sína á ólík svið. Kennari þarf því að meta framfarir. Það er hægt að gera með fjölbreyttum aðferðum, m.a. með aðstoð nemandans þar sem hann metur sjálfur framfarir sínar, en einnig er mikilvægt að námsmat sé breytilegt og sífellt á meðan á námi stendur (Guðmundur B. Arnkelsson, 2000).

Stærðfræðideild MK hefur undanfarin ár lagt áherslu á erlend samskipti og þróunarstarf. Stærðfræðikennarar skólans hafa tengsl inn í alþjóðlega GeoGebrusamfélagið gegnum GeoGebru á Íslandi, til dæmis hafa kennarar skólans sótt alþjóðlegar ráðstefnur og fundi á Norðurlöndum og í Eystrasaltslöndum. Kennarar við skólann hafa einnig staðið fyrir GeoGebrudegi í MK fyrir starfandi kennara og hefur skólinn verið útnefndur GeoGebruskóli. Kennarar við skólann eru í þróunarsamstarfi við aðra kennara í Evrópu, Eystrasaltslöndunum og á Norðurlöndunum í gegnum Comeniusarverkefni og Nordic GeoGebra Network (NGGN).

## Markmið verkefnis samkvæmt umsókn

- Að efla nemendur í sjálfstæðum og öguðum vinnubrögðum
- Að hvetja kennara til að skapa nýtt verklag og auka fjölbreytni í kennsluháttum
- Að fara nýjar leiðir í mati á hæfni nemenda í stærðfræði

## Leiðir sem valdar voru til að ná markmiði

Í þróunarverkefninu „Skapandi námsmat í stærðfræði með notkun upplýsingartækni“ er gerð tilraun til að fara nýjar leiðir í kennslu og námsmati þar sem áhersla er lögð á að vinna með heildstæðan kennsluferil ákveðinna viðfangsefna í stærðfræði. Stærðfræðikennurum skólans var gefinn kostur á að vera með í þessari þróunarvinnu, en af óljósum ástæðum var ekki áhugi fyrir almennri þátttöku. Þeir tveir kennarar sem unnu umsóknina um styrkinn hittust hins vegar vikulega allan veturinn og daglega í desember og maí, skiptu með sér ábyrgð á verkefninu og eru því báðir í raun verkefnastjórar. Þeir lúka við starfið á tilsettum tíma. Haldnir voru reglulegir fundir þar sem þeir skiptu með sér verkum. Annar bar ábyrgð á tæknimálum en hinn á kennsluleiðbeiningum og rannsóknarverkefnunum. Á fundum ígrunduðu þeir jafnóðum vinnuna áður en þeir ákváðu næstu skref og unnu saman að námsmatsverkefnum.

Ákveðið var stax á haustönn að fullvinna kennsluferil í viðfangsefnunum „jafna beinnar línu“ og „fleygboga“. Kennsluleiðbeiningar fyrir kennara og verkefni eru opin öllum og hægt er að nálgast þau á vefsíðunum <https://sites.google.com/site/jafnalinu/> og <https://sites.google.com/site/fleygbogi/>.

Kennsluferlið samanstendur af:

- Kennsluleiðbeiningum með kveikju
- Rannsóknarverkefnum
- Skýringum á stærðfræðilegum viðfangsefnum
- Rafrænum æfingum
- Námsmatsverkefnum

Í kennsluleiðbeiningum er að finna þekkingar-, leikni- og hæfniviðmið á kennsluferlinum. Þar má finna kveikju sem á að tengja viðfangsefnið við fyrri þekkingu nemandans. Í rannsóknarverkefnum er lögð áhersla á að nemendur byggja upp þekkingu og skilning á viðfangsefnunum með umræðum og athugunum. Í rafrænum æfingum vinna nemendur verkefni þar sem þeir öðlast leikni í því viðfangsefni sem er verið að fara yfir og endurgjöf birtist jafnóðum. Þannig átta þeir sig á stöðu sinni í náminu. Þeim er ætlað að senda kennara sínum niðurstöður úr rannsóknarverkefnum og rafrænum æfingunum þannig að hann geti fylgst með stöðu þeirra jafnóðum og metið framfarir þeirra. Í námsmatsverkefnum er áhersla lögð á að nemendur fái tækifæri til að nýta sköpunarkraft sinni til að leysa viðfangsefni og fylgja verkefnunum matslistar til að auðvelda kennurum að meta hæfni nemenda. Einnig er hægt að finna spurningalista sem hægt er að leggja fyrir nemendur til að þeir meti sjálfir stöðu sína og jafningjamat. Í kennsluleiðbeiningum eru tillögur að heildarmati yfir efnispáttinn sem kennsluferillinn nær yfir.

Lögð er áhersla á að nemendur vinni og ræði saman í litlum hópum og vinni verkefni með hjálp upplýsingatækni en þannig er hægt að meta aðra þætti en gert er með hefðbundnu námsmati. Ýmsar nýjungar á sviði upplýsingatækni, t.d. GeoGebra og myndbandagerð, gera kennurum kleift að meta hæfni nemenda til að tjá sig munnlega og/eða á myndrænan og skapandi hátt um viðfangsefni stærðfræðinnar.

Á vinnufundum var mikið rætt um hvernig heildarmat væri sanngjarnt og lögð áhersla á stíganda í námi. Með námsmatsverkefnum voru gátlistar gerðir fyrir kennara og unnið einfalt sjálfsmat fyrir nemendur. Þegar matslistar voru gerðir var haft samband við Baldur Sigurðsson, dósent í íslensku við Háskóla Íslands, og gaf hann góð ráð við gerð listanna. Í

fylgiskjölum 1, 2, 3, 4 og 5 má sjá dæmi um verkefni á ofangreindum vefsíðum um „jöfnu beinnar línu“ og „fleygboga“, en best er að skoða ferlana í heild á vefsíðunum.

Freyja Hreinsdóttir var faglegur ráðgjafi í verkefninu. Þegar verkefnastjórar unnu verkefnið voru þau jafnóðum send til Freyju. Hún las þau yfir og gaf góð ráð. Í júní voru haldnir þrjú fundir með Freyju þar sem farið var yfir kennsluferlanna, þeir ígrundaðir og næstu skref ákveðin. Við teljum að vefirnir eigi að vera í stöðugri þróun og taka breytingum eftir óskum og þörfum nemenda. Við teljum að með fjölbreyttum kennslu- og námsmatsaðferðum sé auðveldara að koma til móts við þarfir flestra, helst allra nemanda.

## Frávík miðað við áætlun verkefnisins

Nokkur frávík komu upp hvað varðar þá áætlun sem gerð var við umsókn til Sprotasjóðs. Þegar ljóst var að styrkur var veittur í verkefnið var boðað til fundar í stærðfræðideild skólans og kennurum boðið að vera með í verkefninu. Flestir sýndu því áhuga og var gert ráð fyrir að í september færi af stað vinna og skipulagning. Ekkert varð hins vegar úr því að kennarar mættu á skipulagsfundinn og þrátt fyrir ítrekun kom enginn til að vinna við verkefnið. Hins vegar skapaðist umræðugrundvöllur fyrir kennarana til að ræða um mismunandi leiðir í námsmati og á deildarfundum ræddu kennarar mikið um mismunandi leiðir til að meta nemendur. Nokkrir kennarar prófuðu óhefðbundnar leiðir í námsmati og ræddu niðurstöður sínar faglega. Helstu breytingar voru að nemendur í fyrstu áföngum skólans í stærðfræði gátu valið á lokaprófi hve stór hluti þess væri í heildarnámsmati áfangans, þ.e. hvort lokapróf gildi 20, 40, 60 eða 80 % af námsmati áfangans. Undanfarin ár hafa nemendur í fyrstu áföngum getað unnið af sér lokapróf ef þeir fá alltaf yfir 8 í öllum skilum, þ.e. í verkefnum, kaflaprófum og vinnubókum. Almennt vildu kennarar kynna ítarlega námsmat í áfangalýsingum og hafa hefðbundin skil milli kennslu og námsmats.

Þróunarverkefnið um kennsluferlana „jöfnu beinnar línu“ og „fleygboga“ var því að mestu í höndum verkefnastjóra og skiptu þeir ábyrgð verksins milli sín. Samvinna þeirra gekk mjög vel og héldu þeir áætlun eins og gert var ráð fyrir í umsókn um styrkinn.

## Helstu hindrarnir sem komu upp við vinnu verkefnisins

Segja má að helsta hindrandir sem upp komu vörðuðu tæknimál og uppsetningu kennsluferlanna. Í fyrstu reyndu verkefnastjórar að stofna vefsíðu á Weebly. Fljótlega kom í ljós vandamál varðandi rafræn verkefni á því heimasvæði sem ekki var hægt að leysa. Þá var leitast við að fá svæði á heimasíðu MK en einnig þar komu upp vandamál varðandi rafrænu verkefnin. Næst stofnuðu verkefnastjórar rafrænar bækur á heimasvæði GeoGebratube en þá komu upp vandamál varðandi textauppsætningu í verkefnum. Að lokum fannst lausn á uppsetningu eins og við vildum hafa hana á vefsvæðinu Google sites.

Miklar umræður fóru fram um hvernig uppsetning á vefsvæði ætti að vera. Mest snérust umræðurnar um til hvaða hóps vefsvæðið ætti að höfða, þ.e. kennara eða nemenda. Við ákváðum að hanna vefsvæði sem væri ætlað kennurum. Þeir geta prentað út verkefnablöð ef þeir vilja halda vefsvæðinu fyrir sig og vísað á rafrænar æfingar og myndbönd. Við ákváðum að betra væri að hanna vefsvæðið fyrir kennara til að þeir gætu valið það sem þeir telja nýtast best og hafnað öðru en að sjálfsögðu hugsum við okkur að námsferillinn sé fullnægjandi og með því að fara í gegnum verkefnin á vefsíðunum hafi nemendur náð þeirri hæfni sem ætlast er til af þeim í viðkomandi námsþætti. Notagildi verkefnanna teljum við vera meira ef svæðið er ætlað kennurum.

Í byrjun vildum við búa til eitt stórt vefsvæði með verkefnum á 1. – 4. þrepi en ákváðum að lokum að búa til vefsvæði fyrir hvert afmarkað viðfangsefni fyrir sig. Jafna beinnar línu er á 1. þrepi en fleygbogi er á 2. þrepi. Við ætlum hins vegar að búa til eitt stórt vefsvæði í framtíðinni þar sem hægt er að vísa á mismunandi viðfangsefni stærðfræðinnar og munum skipta þeim í þrep samkvæmt aðalnámskrá framhaldsskóla. Þannig skapast heildstætt kennsluferli um stærðfræði þar sem kennarar geta nálgast öll þau viðfangsefni sem kennd eru á framhaldsskólastigi.

Við höfðum mótað að mestu jöfnu beinnar línu í febrúar og átti að prófa að kenna ferilinn á vorönn. Vegna verkfalls sem stóð yfir í þrjár vikur treystu kennarar sér ekki til að fara þessa leið að sinni, en báðir ferlarnir verða prófaðir næsta haust. Við höfðum mikinn áhuga á að prófa þá í kennslu og gerum ráð fyrir að þeir verði kenndir næsta haust.

Helstu hindranir í kennslu ferlanna verða líklega námsmatsverkefnin. Stærðfræðikennarar eru vanir að meta nemendur út frá hefðbundnum stærðfræðikönnunum sem leggja áherslu á þekkingu og leikni nemenda. Það tekur tíma fyrir kennara að átta sig á

hæfniviðmiðum og hvernig hægt er að meta þau. Kennurum í okkar deild finnst matið á verkefnum í ferlunum nokkuð flókið og erfitt að halda utan um þetta aukna mat. Við teljum að með breyttu fyrirkomulagi á starfi kennara komi þessi hugsun til með að breytast og matið verði í framtíðinni meira í átt að þessum hugmyndum. Við reyndum að auðvelda matið með því að setja inn auðkenningu í rafrænu verkefnin þannig að kennari sjá strax hvort viðkomandi nemandi hefur unnið rafrænu verkefnin. Þannig auðveldum við í raun yfirferð kennara og eftirlit. Í námsmatsverkefnunum leggjum við áherslu á að meta hæfni en við settum einnig inn hefðbundið próf sem við köllum heimapróf í fleygbogaverkefnunum.

## **Helsti ávinningur af vinnu við verkefnið, jákvæð atriði sem fylgdu í kjölfar eða samhliða verkefnisvinnu**

Þróunarverkefnið hefur haft jákvæð áhrif á umræður kennara í stærðfræðideild Menntaskólans í Kópavogi. Það veitti tækifæri til umræðna um námsmat og ígrundunar um þróun þess. Það hefur hvatt kennara til að ræða faglega um skólastarfið. Þegar kennarar ígrunda starf sitt og ákveða næstu skref, skoða niðurstöður og meta vinnuferli er kennsla í stöðugri þróun. Við teljum að nú hafi áfangasigrar náðst en það þarf stöðuga ígrundun og umræður til að ná fullri samstöðu um leiðir í stærðfræðikennslu í MK.

Það er niðurstaða okkar verkefnastjóra að með fjölbreyttum kennslu- og námsmatsaðferðum sé auðveldara að koma til móts við þarfir nemanda. Þá kennsluferla sem nú hafa verið mótaðir er auðvelt að þróa áfram og miðla til annarra kennara skólans.

Ef breytt námsmat verður framkvæmt samkvæmt tillögum verkefnastjóra þá koma kennarar til með að ræða meira saman í framtíðinni um fjölbreytt námsmat og kennslu. Stjórnendur skólans hafa sýnt áhuga á breyttu námsmati og hafa sýnt mikinn áhuga á verkefninu. Verkefnastjórar telja að ef kennsluferlar eins og hér hafa verið gerðir verði kenndir í stærðfræðideild skólans náist öll markmið verkefnisins. Við ætlum að halda áfram að vinna að fleiri kennsluferlum og hafa stjórnendur skólans hvatt okkur til að útbúa ferla fyrir nemendur sem hefja nám í skólanum í haust.



## Mat á verkefninu samkvæmt umsókn

Við teljum að þetta verkefni geti haft góð áhrif á skólastarf í MK. Ef kennarar almennt skoða kennsluferil sem ákveðna heild sem hefst með settum viðmiðum og skil milli kennslu og námsmats séu ekki rofin verði til ný sýn á starf kennara. Almennt þurfa kennarar að leggja áherslu á tengsl kennslu, náms og námsmats og að ekki sé hægt að rjúfa þessi tengsl. Leið kennarans í kennslu og mati er ráðgjöf og ef hann lítur á námsmat sem leið að marki en ekki markmið í sjálfu sér þá gefur hann nemendum tækifæri til að hafa áhrif á eigið námsmat. Þannig næst sameiginleg vinna nemenda og kennara að viðmiðum sem ætlað er að nemendur ná.

Verkefnastjórar gera ráð fyrir að kynna niðurstöður þessarar vinnu á kennarafundi, en síðastliðið haust kynntu þeir upphaf þessarar vinnu. Vonast þeir eftir því að þannig geti þeir haft áhrif á aðra kennara skólans. Í vetur var annar verkefnastjórinn í starfendarannsóknarhópi kennara í MK sem kom saman reglulega. Þar kynnti hann framgang verkefnisins og fékk góð ráð og hvatningu frá samkennurum.

## Niðurstöður verkefnisins

Í heild hefur vinna við verkefnið gengið mjög vel. Verkefnastjórar hafa mótað kennsluferil sem þeir telja að hægt sé að yfirfæra á flesta námsþætti í stærðfræði á framhaldsskólastigi. Þeir telja mikilvægt að rjúfa ekki tengsl kennslu, náms og námsmats heldur leggja áherslu á að nám nemenda myndi heildstæðan feril þar sem áhersla er lögð á leiðsagnarmat og nemendur hvattir til að nota þá hæfni sem þeir hafa tileinkað sér til áframhaldandi náms.

Umræður og ígrundanir milli kennara í stærðfræðideildinni hafa þróast í heppilegan farveg þar sem reynt er að móta áframhaldandi vinnu til að fá heildarmynd yfir þá stærðfræði sem kennd verður á hinum ýmsu brautum skólans í komandi framtíð.

Stjórnendur skólans hafa hvatt verkefnastjóra til að halda áfram þróunarvinnu þessari og munu þeir næsta vetur sennilega reyna að móta heildarmynd á þeim áföngum sem kenndir verða í skólanum og þróa þessa vinnu áfram frá fyrstu áföngum sem nemendur koma til með að fara í fram að lokaáföngum stærðfræðináms í skólanum. Það er trú okkar og ósk að við

mótun þessarar vinnu taki flestir kennarar deildarinnar þátt. Stefnt er að því að kenna námsferlana „jafna beinnar línu“ og „fleygboga“ í haust og um áramót verður því hægt að segja með nokkurri vissu hvort markmið verkefnisins náðust. Þessir ferlar nýtast öðrum stærðfræðikennurum á framhaldsskólastigi þar sem þeir eru birtir á opnu vefsvæði sem allir hafa aðgang að.

## **Áætlun um kynningu á afrakstri verkefnisins og helstu niðurstöðum**

Verkefnastjórar ætla að kynna þróunarverkefnið á GeoGebrudegi MK næsta haust. Síðastliðið haust voru hugmyndir af verkefninu kynntar á GeoGebrudegi. Þátttakendur höfðu mikinn áhuga á að fá að fylgjast með og því var ákeðið að vera með kynningu og námskeið á næsta GeoGebrudegi.

Verkefnastjórar munu kynna þróunarverkefnið á Menntakviku Menntasíndastofnunar Háskóla Íslands 3. október næstkomandi.

Verkefnastjórar hafa áhuga á að skrifa grein um verkefnið í Flatarmál. Í september mun annar verkefnastjórinn kynna verkefnið fyrir kennurum frá 11 Evrópulöndum sem er í Comeniusarsamstarfi við MK og það verður kynning á verkefninu í Ylöjärvi í Finnlandi 31. október næstkomandi á ráðstefnu Nordic GeoGebra Network.

## Heimildir

Guðmundur B. Arnkelsson (2000). *Orðgnótt*. Orðalisti í almennri sálarfræði. 4. útg.

Reykjavík, Háskóli Íslands: Háskólaútgáfan.

Ingvar Sigurgeirsson. (1998). *Námsmat byggt á traustum heimildum ...* sótt 7. ágúst 2014 af

<http://www.ismennt.is/vefir/fjarnogk/namsmatnogk/thkr/thkrist.htm>

Mennta- og menningarmálaráðuneyti. (2011). *Aðalnámskrá framhaldsskóla*. Almennur hluti.

Sótt 7. ágúst 2014 [http://www.menntamalaraduneyti.is/utgefing-](http://www.menntamalaraduneyti.is/utgefing/efni/namskrar/adalnamskra-framhaldsskola/)

[efni/namskrar/adalnamskra-framhaldsskola/](http://www.menntamalaraduneyti.is/utgefing/efni/namskrar/adalnamskra-framhaldsskola/)

# Fylgiskja I - Kennsluleiðbeiningar með kveikju

## Kennsluleiðbeiningar - Jafna beinnar línu

Kennari þarf að byggja upp heildstætt kennsluferli þegar hann kennir jöfnu beinnar línu. Í því felst að viðfangsefninu fylgja skýr markmið. Kennari hefur kennsluna með kveikju sem tengir nýja þekkingu þeirri sem fyrir er. Þegar fjallað er um viðfangsefnið er mikilvægt að kennari meti bæði stöðu nemenda og framfarir. Hverjum þætti viðfangsefnisins er sett markmið samkvæmt námskrá. Megináhersla er lögð á að nemendur dýpki skilning sinn með því að byggja upp þekkingu og leikni sem hann notar til að draga ályktanir og skýra lausnir sínar. Ef það tekst er hægt að meta hæfni nemandans. Hér lítum við svo á að tilgangur námsmats sé að leiðbeina nemendum. Með því að auka hæfni nemenda geta þeir yfirfært þekkingu sína á ólík svið. Kennari þarf að meta framfarir. Það er hægt að gera með fjölbreyttum aðferðum m.a. með aðstoð nemandans þar sem hann metur sjálfur framfarir sínar.

### Þekkingarviðmið:

Nemandi skal hafa öðlast þekkingu og skilning á:

- uppbyggingu fallsins  $ax + b$
- hvað einkennir samsíða og hornréttar línur

### Leikniviðmið:

Nemandi skal hafa öðlast leikni í að:

- teikna beina línu (graf fyrsta stigs falls)
- finna skurðpunkt við  $x$ -ás og  $y$ -ás
- finna hallatölu
- gera gildistöflu
- finna skurðpunkt tveggja lína

### Hæfniviðmið:

Nemandi getur nýtt sérhæfa þekkingu og leikni til að:

- skýra lausnaleyð sína
- draga ályktanir og lesa upplýsingar úr mynd af beinni línu

## Kveikja

Í upphafi kennsluferilsins hentar vel að beina sjónum nemenda að efninu með spurningum og umræðum sem nemendur þekkja fyrir til að kveikja áhuga á viðfangsefninu.

YouTube



Verkefni í kveikju: (<http://youtu.be/KvkOKna7msA?hd=1>)

Opnaðu GeoGebru. Smelltu á **Skoða** og veldu töflureikni. Hugsaðu þér fimm tölur milli -10 og 10. Skráðu þær inn í töflureikni í dálk A. Farðu síðan í dálk B, smelltu á **=** og skráðu eftirfarandi reglu:

- margfaldaðu tölurnar sem þú hugsaðir þér með tveimur og dragðu einn frá, þ.e.  $=2*A1 - 1$ .

Ljómaðu tölurnar í töflureikninum, hægri smelltu á **búa til, listi punkta**. Þá birtast punktarnir á teikniborðinu. Veldu næst verkfærið **lína gegnum tvo punkta** og smelltu á tvo punkta. Lenda allir punktar þínir á línunni?

Hver er jafna línunnar?

Þú getur séð hvort svarið er rétt með því að hægrismella á jöfnu línunnar í Algebruglugga og velja **Jafna  $y = mx + b$** .

Tengist jafna línunnar reglunni sem gefin var í upphafi?

## Umfjöllun um kennslutilhögun

Í eftirfarandi verkefnum vinna nemendur með línu í forritinu GeoGebru. Gert er ráð fyrir að nemendur fái verkefni útprenntuð. Þegar þeir hafa farið í gegnum verkefni og námsmatið hafa þeir fylgt ákveðnu kennsluferli sem hefst með kveikju og endar með námsmati. Verkefni skiptast í rannsóknarverkefni þar sem nemendur byggja upp þekkingu og skilning á viðfangsefnunum en einnig geta nemendur öðlast leikni með ýmsum rafrænum æfingum á vefnum, þar sem endurgjöf birtist jafnóðum. Þannig átta nemendur sig á stöðu sinni í náminu. Nemendum er ætlað að senda kennara niðurstöður úr leikniæfingum þannig að hann geti fylgst með stöðu þeirra jafnóðum.

Í **verkefni 1** er verið að kanna áhrif stuðlanna  $a$  og  $b$  á jöfnuna  $y = ax + b$

Nemendur teikna og rannsaka beinar línur í GeoGebru og draga ákyktanir af niðurstöðum.

Í verkefni A kanna nemendur halla beinnar línur.

Í verkefni B skoða þeir áhrif stuðulsins  $b$  í jöfnunni og skurðpunkt við  $y -$  ás.

Í verkefni C er verið að skoða tvær ákveðnar línur, gera gildistöflur og teikna þær.

Í verkefni D leita nemendur að línunni í umhverfi sínu.

Áætlaður tími er 4 – 6 kennslustundir.

Heppilegt er að nemendur vinni heima rafrænu æfingarnar: Hallatala línur, Gildistafla,  $F(x)$  og Línuleikur og sendi kennara niðurstöður sínar. Í rafrænu verkefni: Gildistafla – jafna línu þurfa nemendur að fá 5 rétt svör. T.d. þegar þeir hafa náð því þurfa þeir að taka skjámynd (PrtSc) af niðurstöðunum, svara spurningum sem birtast eftir fimm rétt svör og senda

kennara niðurstöðurnar í tölvupósti. Leiðbeiningar um verkefnaskil og hvað nemendur eiga að gera geta þeir lesið þegar þeir gera rafrænu æfingarnar.

Í **verkefni 2** er hallatala línu könnuð. Nemendur draga línu gegnum tvo mismunandi punkta og rannsaka hver halli línanna verður. Jafnframt reikna þeir hallatölu mismunandi lína. Áætlaður tími er 2 kennslustundir.

Heppilegt er að nemendur vinni heima rafrænu æfinguna Hallatala og sendi kennara niðurstöður sínar.

Í **verkefni 3** er verið að kanna samsíða línur og hornréttar. Einnig finna nemendur skurðpunkta tveggja lína og fást við jöfnuhneppi.

Í verkefni A búa nemendur til samsíða línur.

Í verkefni B finna nemendur línur sem eru hornréttar hvor á aðra.

Í verkefni C finna nemendur skurðpunkt tveggja lína.

Í verkefni D leysa nemendur jöfnuhneppi.

Í verkefni E vinna nemendur með línuleg líkön.

Áætlaður tími er 4 – 6 kennslustundir.

Heppilegt er að nemendur vinni heima rafrænu verkefnin: Línuleikur og  $f(x)$  – fallgildi, æfing. Í rafrænu verkefnunum þurfa nemendur að fá 8 – 10 rétt svör. Þegar þeir hafa náð því þurfa þeir að taka skjámynd (PrtSc) af niðurstöðunum, svara spurningum sem birtast eftir fjölda réttra svara og senda kennara niðurstöðurnar í tölvupósti.

Ef kennari vill að nemendur hafi lýsingu á því hvernig á að teikna ferla í GeoGebru en það á að gera í verkefni 1 – 3 þá fylgir hún með verkefninu. Einnig er hægt að sýna kynningarmyndband sem sýnir hvernig nemendur eiga að teikna ferlana.

## Námsmat

Mat á námi er órjúfanlegur þáttur alls skólastarfs og eðlilegur hluti af kennslustund. Hugtakið námsmat er oftast notað um mat á árangri í námi en í raun er það hluti af kennsluferli. Til að geta gefið traustar upplýsingar þarf kennari að taka tillit til margra þátta og nota fjölbreyttar leiðir við námsmatið. Þær upplýsingar sem gefnar eru í lok náms þurfa að byggja á margs konar gögnum, en ekki eingöngu á einu prófi. Sú þekking sem kennari aflar sér við að fylgjast með námi nýtist honum við að taka ákvarðanir um hvað hann vill leggja áherslu á í kennslu sinni. Greining kennara á námsferli nemanda er liður í því ferli sem kennsla byggir á. Námsmat á að vera fyrir nemandann og því skipta skoðanir hans máli. Mikilvægt er að nemandi skoði stöðu sína með sjálfsmati og átti sig á því hvað hann hefur lært. Skólinn er fyrir nemendurna og því þarf nemandinn að vita hvar hann stendur. Námi á sér ekki stað

nema nemandinn læri. Tilgangur matsins er að stuðla að námi nemandans. Hlutverk kennarans er að leiðbeina og útskýra fyrir nemandanum. Því er mikilvægt að námsmat sé breytilegt og sífellt á meðan á námi stendur.

Tillögur að námsmati. Allt ferlið er metið.

- 30% - nemendur skila verkefnum 1 - 3 í GeoGebru
- 20% - nemendur skila rafrænum æfingum
- 10% - sjálfsmat nemenda
- 40% - námsmatsverkefni – hugarkort og/eða myndband í lok kennsluferils.

## Fylgiskjal 2 – Rannsóknarverkefni í GeoGebru

### Verkefni 1

#### Grunnatriði fleygboga

Í þessu verkefni eru kannaðir stuðlarnir  $a$ ,  $b$  og  $c$  í jöfnunni  $f(x) = ax^2 + bx + c$ . Nemendur teikna og rannsaka annars stigs jöfnu í GeoGebru og draga ályktanir af niðurstöðum.

Í verkefni A er löggun (vídd) fleygbogans könnuð.

Í verkefni B er skoðuð lárétt hliðrun, samhverfuás og staðsetning fleygboga í hnitakerfinu.






Í verkefni C er lóðrétt hliðrun fleygbogans skoðuð.

Í verkefni D leita nemendur að fleygboga í umhverfi sínu.



**Verkefnalýsing** fyrir fleygboga í GeoGebru (<http://youtu.be/6qEUdETH1rl>).



Skref	Aðgerð	Tæki
1	Búðu til rennistiku $a$ með því að velja verkfærið <b>rennistika</b>  og smella á teikniborðið og ákveða staðsetningu.	
2	Endurtaktu og búðu til rennistikur $b$ og $c$ .	
3	Hægt er að breyta gildum á rennistikunum með því að velja verkfærið <b>færa</b>  t.d. þannig að $a=1$ , $b=0$ , $c=0$ .	
4	Skrifaðu fallið $a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ í inntaksreit.	
5	Vistaðu skjalið og leystu verkefni A - D.	

**A** Fylltu inn í töfluna hér að neðan með því að breyta  $a$  og hafa  $b = 0$  og  $c = 0$ .

$a$	$f(x) = ax^2 + bx + c$
-5	
-2	
1	
3	
-0.5	
0.2	

Hvernig breytist fleygboginn með því að breyta  $a$ ?

---



**B** Fylltu inn í töfluna hér að neðan með því að breyta  $b$  og hafa  $a = 1$  og  $c = 0$ .

$b$	$-b/a$	$f(x) = ax^2 + bx + c$
-5		
-3		
0		
1		
4		

Hvaða áhrif hefur  $b$  á graf og jöfnu fallsins? \_\_\_\_\_

Skoðaðu vel botnpunktana á ferlinum.

Hvernig breytist fleygboginn með því að breyta um formerki á  $b$  (+ eða -)?

Rökstyddu svar þitt.

---

Er ferillinn samhverfur um botnpunktinn? \_\_\_\_\_

Skoðaðu graf fallsins þegar  $a = 1$ ,  $b = -5$  og  $c = 0$ . Hvert er hnit punktsins þegar  $x = 0$ , þ.e.  $y$  – hnit punktsins (skurðpunkt fallsins við  $y$  – ás)?  $y =$  \_\_\_\_\_

Skoðaðu punkt á fallinu sem hefur sama  $y$  – hnit og í punktinum þegar  $x = 0$ .

Hvert er hnit þess punkts? \_\_\_\_\_

Hvert er bilið milli þessara tveggja punkta? \_\_\_\_\_

Skoðaðu einnig graf fallanna þegar  $b = -3, 0, 1$  og  $4$ ,  $a = 1$  og  $c = 0$  (sjá töfluna hér að framan).

Berðu niðurstöðurnar saman við jöfnu fallsins. Hver er reglan?

Rökstyddu svar þitt.

---

**C** Fylltu inn í töfluna hér að neðan með því að breyta c og hafa  $a = 1$  og  $b = 1$ .

c	$-b/a$	$\frac{-b}{2a}$	$f(x) = ax^2 + bx + c$
-3			
-2			
1			
4			

Hvernig breytist fleygboginn með því að breyta c? \_\_\_\_\_

Hvað gerist í  $\frac{-b}{2a}$ ? \_\_\_\_\_

Skoðaðu lausnarformúluna fyrir annars stigs fall og berðu saman við jöfnu samhverfuáss

p.e.  $x = \frac{-b}{2a}$

Hver er niðurstaðan? Rökstyddu svar þitt.

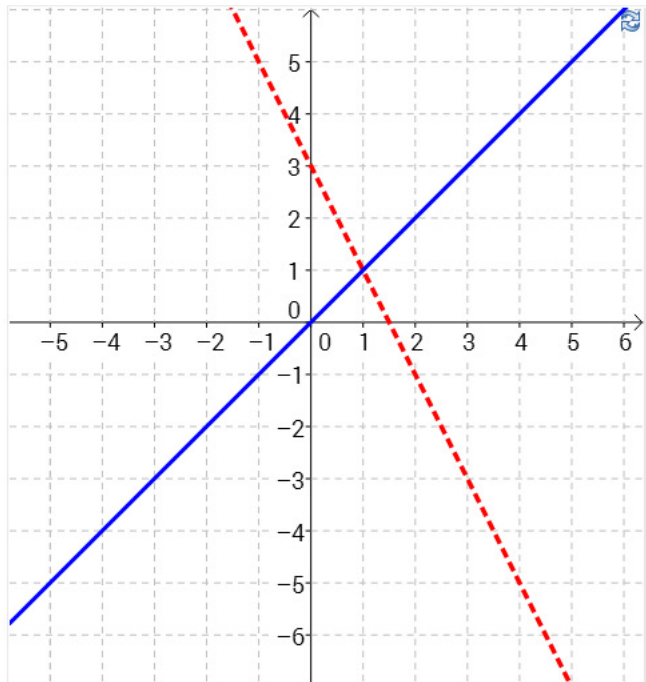
\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

**D** Hvar er hægt að finna fleygboga í náttúrunni?

Finndu minnst þrjár myndir af fleygborga á vefnum og settu hér í verkefnið og/eða farðu með myndavél og taktu mynd af fleygboga í umhverfi þínu.

## Fylgiskjal 3 - Rafræn æfing



### Línuleikur



Skráðu jöfnu rauðu línunnar sem  $g(x)$ :

$$g(x) = -2x + 3$$

Þú hefur leyst 5 verkefni af 8.

# Fylgiskja 4 - Námsmatsverkefni

## Hugarkort

Nemendur vinna saman tveir og tveir og gera hugarkort/veggspjald. Þeir fá lista yfir hugtök sem tengjast beinni línu. Þeir búa til hugarkort þar sem þeir skilgreina hugtökin og koma með dæmi um þau.

Hugtök á lista:

**Gildistafla, hallatala, jafna línu, mynd/graf, hornréttar/samsíða línur, skurðpunktur, línulegt líkan.**

Á myndinni hér að neðan er dæmi um hugarkort og matslisti yfir það sem mikilvægt er að komi fram hjá nemendum. Á næstu síðu er matsblað fyrir kennara.

The image shows a hand-drawn mind map centered on the word "lína" (line). The mind map branches into several categories:

- Jöfnuhopp** (Equation jump)
- Skurðpunktur 2 lína** (Intersection of 2 lines)
- Skurðpunktur við y-ás** (Intersection with y-axis), with an example:  $y=2x-1$  hefur skurðp. við y-ás í  $(0,-1)$ . A small graph shows two intersecting lines.
- Gildistæðla** (Domain), with sub-points: *litróf* and *blámi*.
- Hallatala mismunur tveggja** (Slope difference of two), with sub-point: *þun*.
- Mynd** (Image)
- Samsíða/hornréttar línu** (Parallel/perpendicular lines), with sub-point: *markalega að sömu línu*.
- Línur í daglegan lífi** (Lines in everyday life)
- Skurðpunktur við x-ás** (Intersection with x-axis)
- Mj. sm. Áttm. Jöfnu línu** (Small system of 2 linear equations), with equations:  $ax+by+c=0$  and  $y=kx+b$ , and the point-slope formula:  $(y-y_1) = k(x-x_1)$  *punkt halla*.

To the right of the mind map is a table titled "mats listi" (score list) with the following entries:

Hallatala / mismunur tveggja punkta	2
Skurðp. við y-ás	2
Samsíða/hornréttar/samhverf	2
Skurðpunktur við x-ás	1
Jafna beinnar línu	} 2
Alm. punkt halla	
Skurðhalla	
Gildistæðla	2
Skurðpunktur tveggja lína/þéttlíni	2
Línur í daglegan lífi	1
Mynd	2
<hr/>	
	16 stig

## Jafna línu - Hugarkort / Veggspjald

Nafn/nöfn: \_\_\_\_\_ Stig alls (160): \_\_\_\_\_

Hugtök (140) \_\_\_\_\_

Jafna línu (20 stig)

Nemandi þekkir mismunandi form á jöfnu beinnar línu og sýnir dæmi um þau öll. $ax+by+c=0$ , $y=ax+b$ og $(y-y_1)=k(x-x_1)$	A B C D E	Nemandi veit að graf fyrsta stigs falls er bein lína.
---	-----------	---

Hallatala línu (20 stig)

Nemandi getur fundið hallatölu línu út frá tveimur punktum, lesið hana út úr mynd og úr jöfnu línu.	A B C D E	Nemandi áttar sig á að þegar hallatala línu er jákvæð þá hallar línan upp frá vinstri til hægri en ef hallatala er neikvæð snýr hún niður.
---	-----------	--

Skurðpunktur við y-ás (20 stig)

Nemandi getur fundið skurðpunkt við y-ás út frá tveimur punktum, hallatölu og punkti, og út frá mynd.	A B C D E	Nemandi gerir sér grein fyrir að bein lína sem hefur hallatölu sker y - ás.
---	-----------	---

Samsíða/Hornréttar línur (20 stig)

Nemandi áttar sig á að línur með sama halla eru samsíða. Nemandi veit að línur eru hornréttar hvor á aðra ef margfeldi hallatalna er $-1$ .	A B C D E	Nemandi áttar sig á að línur geta haft mismunandi hallatölu.
---	-----------	--

Gildistafla (20 stig)

Nemandi getur sett upp gildistöflu og reiknað y - gildi út frá jöfnu beinnar línu. Nemandi áttar sig á því að þar er farið eftir ákveðinni reglu og reglan segir fyrir um hnit punkta á línu. Nemandi getur einnig reiknað x - gildi út frá y - gildi.	A B C D E	Nemandi áttar sig á að punktur í hnitakerfi hefur ákveðið x – og y – gildi.
--	-----------	---

Mynd/Graf beinnar línu (20 stig)

Nemandi getur teiknað graf beinnar línu út frá gildistöflu, tveimur punktum, hallatölu og einum punkti og jöfnu línunnar.	A B C D E	Ekkert kemur fram um graf beinnar línu.
---	-----------	---

Skurðpunktur við x-ás (10 stig)

Nemandi getur fundið skurðpunkt við x-ás út frá gildistöflu, jöfnu línunnar (áttar sig á að setja $y=0$ ), hallatölu og einum punkti og út frá tveimur punktum (á mynd).	A B C D E	Nemandi gerir sér grein fyrir að bein lína sem hefur hallatölu aðra en 0 sker x - ás.
--	-----------	---

Línur í daglegu lífi (10 stig)

Nemandi getur tengt saman hugtakið bein lína og hluti í umhverfinu.	A B C D E	Umfjöllun nemandans takmarkast við stærðfræðilega notkun á jöfnu
---	-----------	--

Nemandi getur sett upp línuleg líkön (t.d. framleiðslukostnaður, íbúafækkun er línuleg o.s.frv.)		beinnar línu. Hann getur ekki sett upp línuleg líkön eða fundið dæmi um notkun línu í umhverfinu.
--	--	---

**Athugasemdir** \_\_\_\_\_

Frágangur hugarkorts/veggspjalds (20) \_\_\_\_\_

Fjölbreytni og frumleiki (10 stig)

Hugarkortið sýnir hugkvæmni. Nemandi nálgast efnið á sjálfstæðan hátt. Framsetning er fjölbreytt og efnið er gert áhugavert og skemmtilegt.	A B C D E	Endurskrifaður texti án þess að hugsun nemanda komi mikið við sögu.
---	-----------	---

Uppsetning og útlit (10 stig)

Hugarkortið er skýrt og smekklegt. Myndir og texti í jafnvægi.	A B C D E	Frágangur er ófullnægjandi.
--	-----------	-----------------------------

**Athugasemdir** \_\_\_\_\_

## Annars stigs jafna – Hugtakaskilningur

### Hljóð sett við mynd

Nemendur vinna saman tveir og tveir. Þeir horfa á hljóðlaust myndband um annars stigs jöfnu eins oft og þeir þurfa. Þeir finna sér upptökuforrit, t.d. Screencastomatic.com, en einnig er hægt að nota síma til að taka upp. Nemendur eiga að tala inn á hljóðlausu myndbandið og skýra hvað þar fer fram. Þeir setja myndbandið í skjágluggann og stilla á upptöku. Síðan spila þeir myndbandið og tala inn á það. Heppilegast er fyrir nemendur að vera búnir að ákveða fyrirfram hvað þeir ætla að segja þegar þeir hefja upptökuna. Þegar upptöku er lokið senda þeir kennara hana eða birta myndbandið á Youtube og senda kennara slóðina í tölvupósti.

Á næstu síðu er matsblað fyrir kennara.

## Matslisti. Fleygbogi – Myndband

Nafn: \_\_\_\_\_ Stig alls (100): \_\_\_\_\_

Tengir saman mynd og annars stigs jöfnu (10 stig)

Nemandi þekkir mismunandi form á annars stigs jöfnu og þekkir stuðlana a, b og c í jöfnunni.	<b>A B C D E</b>	Nemandi veit að annars stigs fall er fleygbogi.
--	------------------	---

Skilgreinir hlutverk a, b og c í annars stigs jöfnu (40 stig)

Nemandi áttar sig á að stuðullinn a hefur áhrif á vídd fleygbogans og hvort hann hefur topp/botnpunkt, stuðullinn b hliðrar fleygboganum eftir $x - \text{ás}$ (ef b er + tala er fleygboginn að mestu vinstra megin við $y - \text{ás}$ og ef b er - tala er hann að mestu hægra megin við $y - \text{ás}$ ) og stuðullinn c hliðrar honum upp eða niður eftir $y - \text{ás}$ .	<b>A B C D E</b>	Nemandi áttar sig á að stuðlarnir a, b og c hafa áhrif á lögun og stöðu fleygbogans í hnitakerfinu.
---	------------------	---

Finnur skurðpunkta við  $x - \text{ás}$  og  $y - \text{ás}$  (30 stig)

Nemandi getur notað lausnarformúluna til að finna skurðpunkta við $x - \text{ás}$ . Hann áttar sig á að þegar $x = 0$ getur hann fundið skurðpunkt við $y - \text{ás}$ .	<b>A B C D E</b>	Nemandi gerir sér grein fyrir að fleygbogi sker $x - \text{ás}$ og $y - \text{ás}$ .
--	------------------	--

Finnur samhverfuás og botn/topppunkt (20 stig)

Nemandi getur notað jöfnu samhverfuás $x = -b/2a$ til að finna samhverfuásinn. Hann áttar sig á að botn/topppunktur liggur á samhverfuásnum	<b>A B C D E</b>	Nemandi áttar sig á að fleygbogi hefur annað hvort botn- eða topppunkt.
---	------------------	---

## Fylgiskjal 5 – Sjálfsmat

### Sjálfsmat

Skrifaðu 15-20 línur um það hvernig þér gengur að vinna verkefnið um jöfnu beinnar línu. Láttu svör við eftirfarandi spurningum koma fram í textanum.

- Hvað hefur þú lært?
- Hvernig gekk þér að vinna verkefni 1 – 3 í GeoGebru?
- Hvernig gekk þér að vinna rafrænu æfingarnar?
- Gengur þér betur að skilja viðfangsefnið á þennan hátt?
- Ertu ánægð/ur með árangurinn?
- Er einkunnin fyrir veggspjaldið í samræmi við vinnuna sem þú lagðir í það?
- Ef ekki, hvers vegna og getur þú gert eitthvað til að bæta það?
- Hvernig gekk samvinnan?
  
- Hvernig finnst þér að vinna verkefni á tölvu?
- Truflar aðgangur að neti þig við vinnuna?
- Hvað mætti bæta/skýra betur í verkefninum?
- Er eitthvað, og þá hvað, sem þú vilt koma á framfæri varðandi námsefnið eða kennsluna?

Fyrir sjálfsmatið fær nemandi einkunnina:

- 10 fyrir greinargóð svör
- 5 fyrir ófullnægjandi svar
- 0 fyrir að skila ekki